

Równania i nierówności – przypomnienie wiadomości

Rozwiązania

Zad. 1. a) $3x - 7 = 2x + 5 \Rightarrow 3x - 2x = 5 + 7 \Rightarrow x = 12.$

b) $5(2x - 1) = 3(3x + 4)$
 $10x - 5 = 9x + 12 \Rightarrow 10x - 9x = 12 + 5 \Rightarrow x = 17.$

c) $4 - (2x - 3) = 5x + 1$
 $4 - 2x + 3 = 5x + 1 \Rightarrow 7 - 2x = 5x + 1$
 $-2x - 5x = 1 - 7 \Rightarrow -7x = -6 \Rightarrow x = \frac{6}{7}.$

d) $7 - 3(2x + 1) = x - 5$
 $7 - 6x - 3 = x - 5 \Rightarrow 4 - 6x = x - 5$
 $-6x - x = -5 - 4 \Rightarrow -7x = -9 \Rightarrow x = \frac{9}{7}.$

Zad. 2. a) $\frac{x}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$
Sprowadzamy do wspólnego mianownika 15:
 $\frac{5x}{15} - \frac{6}{15} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{5x}{15} = \frac{7}{15} \Rightarrow 5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}.$

b) $\frac{2x-1}{4} + \frac{x+5}{6} = \frac{5}{3}$
Wspólny mianownik 12:
 $\frac{3(2x-1)}{12} + \frac{2(x+5)}{12} = \frac{20}{12}$
 $6x - 3 + 2x + 10 = 20 \Rightarrow 8x + 7 = 20 \Rightarrow 8x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{8}.$

c) $\frac{3x+2}{5} - \frac{x-1}{2} = 1$
Wspólny mianownik 10:
 $\frac{2(3x+2)}{10} - \frac{5(x-1)}{10} = \frac{10}{10}$
 $6x + 4 - 5x + 5 = 10 \Rightarrow x + 9 = 10 \Rightarrow x = 1.$

Zad. 3. a) $|x - 3| = 5$
 $x - 3 = 5$ lub $x - 3 = -5$
 $x = 8$ lub $x = -2.$

b) $|2x + 1| = 7$
 $2x + 1 = 7$ lub $2x + 1 = -7$
 $2x = 6 \Rightarrow x = 3$ lub $2x = -8 \Rightarrow x = -4.$

c) $|3 - x| = 2x$
Po pierwsze: $2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0.$
Zauważmy, że $|3 - x| = |x - 3|.$

- Gdy $x \geq 3$, mamy $|3 - x| = x - 3:$
 $x - 3 = 2x \Rightarrow -3 = x \Rightarrow x = -3$ (sprzeczne z $x \geq 3$).
- Gdy $0 \leq x < 3$, mamy $|3 - x| = 3 - x:$
 $3 - x = 2x \Rightarrow 3 = 3x \Rightarrow x = 1$ (spełnia $0 \leq x < 3$).

Rozwiązanie: $x = 1.$

Zad. 4. a) $3x - 5 > 1 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > 2.$

b) $2 - 4x \leq 10 \Rightarrow -4x \leq 8 \Rightarrow x \geq -2.$

c) $5x + 7 \geq 2x - 8 \Rightarrow 3x \geq -15 \Rightarrow x \geq -5.$

Zad. 5. a) $x > -3 \Rightarrow (-3, +\infty).$

b) $-2 \leq x \leq 5 \Rightarrow [-2, 5].$

c) $x < 1$ lub $x \geq 4 \Rightarrow (-\infty, 1) \cup [4, +\infty).$

Zad. 6. Przykładowe odpowiedzi:

- a) Równanie bez rozwiązań: $x + 1 = x + 2$.
Po uproszczeniu: $x + 1 - x = x + 2 - x \Rightarrow 1 = 2$ – sprzeczność, więc brak rozwiązań.
- b) Równanie tożsamościowe: $2(x + 1) = 2x + 2$.
Po uproszczeniu: $2x + 2 = 2x + 2$ – prawda dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
- c) Nierówność o rozwiązaniu $(0, 2)$: np. $0 < x < 2$.
Zbiór rozwiązań to dokładnie przedział $(0, 2)$.

- Zad. 7.**
- a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
 $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$
 $(x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 2$ lub $x = 3$.
- b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
 $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$
 $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$
 $x_1 = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$.
- c) $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ lub $x = -3$.

- Zad. 8.**
- a) $x^2 - 4x \leq 0$
 $x(x - 4) \leq 0$. Miejsca zerowe: $x = 0, x = 4$.
Parabola skierowana w górę, więc ≤ 0 między pierwiastkami: $x \in [0, 4]$.
- b) $x^2 - 1 > 0$
 $(x - 1)(x + 1) > 0$. Miejsca zerowe: $x = -1, x = 1$.
Parabola skierowana w górę, więc > 0 na zewnątrz przedziału $[-1, 1]$:
 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

- Zad. 9.**
- a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$
Dodajemy równania stronami:
 $(x + y) + (2x - y) = 5 + 1 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$.
Wstawiamy do $x + y = 5$: $2 + y = 5 \Rightarrow y = 3$.
Rozwiązanie: $(x, y) = (2, 3)$.
- b) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$
Z drugiego równania: $x = 1 - y$.
Podstawiamy do pierwszego:
 $3(1 - y) - 2y = 4 \Rightarrow 3 - 3y - 2y = 4 \Rightarrow 3 - 5y = 4$
 $-5y = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{5}$
 $x = 1 - y = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right) = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.
Rozwiązanie: $(x, y) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

- Zad. 10.**
- a) Niech y będzie „inną liczbą”, a x liczbą opisaną w zadaniu.
„Liczba jest o 7 mniejsza od trzykrotności innej liczby”:
 $x = 3y - 7$.
„Suma tych liczb jest równa 23”:
 $x + y = 23$.

Układ:

$$\begin{cases} x = 3y - 7 \\ x + y = 23 \end{cases}$$

Podstawiamy x z pierwszego równania do drugiego:

$$(3y - 7) + y = 23 \Rightarrow 4y - 7 = 23 \Rightarrow 4y = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}.$$

$$x = 3y - 7 = 3 \cdot \frac{15}{2} - 7 = \frac{45}{2} - 7 = \frac{45}{2} - \frac{14}{2} = \frac{31}{2}.$$

Odp.: liczby to $\frac{31}{2}$ i $\frac{15}{2}$.

- b) Niech p oznacza cenę przed obniżką. Po obniżce o 20% zostaje 80% ceny, czyli $0,8p$.

Równanie:

$$0,8p = 40$$

$$p = \frac{40}{0,8} = 50.$$

Odp.: książka kosztowała 50 zł przed obniżką.

- c) Niech n oznacza liczbę uczniów w klasie. Warunki:

$$n < 30, \quad n = 4k + 2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(bo przy podziale na grupy po 4 zostają 2 osoby).

Wypisujemy wszystkie liczby mniejsze niż 30 postaci $4k + 2$:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26.

Odp.: w klasie może być 2, 6, 10, 14, 18, 22 lub 26 uczniów (w praktyce sensowne są liczby od 10 w górę).